# Un exemple simple d'ondes magnétohydrodynamiques.

Un fluide a, au repos, une masse volumique $\rho_0$ et une pression $p_0$ uniforme (on néglige donc le rôle de la pesanteur). Il baigne dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B}_0 = B_0\,\overrightarrow{e}_z$ et possède une conductivité électrique $\sigma$.

On verra dans le cours sur l'induction que la loi d'Ohm s'écrit dans le cas d'un fluide en mouvement :

$$\overrightarrow{j} = \sigma\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

***Question 1 :***
***Expliquer pourquoi, en présence du champ magnétique, il y a couplage entre ondes électromagnétiques et ondes acoustiques (on rappelle qu'un couplage doit être «bidirectionnel») donnant ainsi naissance à une onde «M.H.D.».***

La loi d'Ohm montre clairement que les mouvements du fluide peuvent, en présence d'un champ magnétique, générer des courants. Inversement, les courants, en présence d'un champ magnétique, génèrent des forces de Laplace susceptibles de mettre le fluide en mouvement.

***Question 2 :***
***On se place dans le cas du mercure ou du sodium fondu. On considérera qu'il s'agit, en très bonne approximation, d'un fluide parfait incompressible et conducteur parfait (conductibilité infinie).***
***Sous l'effet de l'onde MHD, on a :***
***la pression :*** $p_0 + p_1(M,t)$
***la vitesse du fluide :*** $\overrightarrow{v}_1(M,t)$
***le champ électrique :*** $\overrightarrow{E}_1(M,t)$
***le champ magnétique :*** $\overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_1(M,t)$
***la densité de courant :*** $\overrightarrow{j}_1(M,t)$ ***(on se convaincra[1] qu'il n'y a aucun lien a priori entre*** $\overrightarrow{j}_1(M,t)$ ***et*** $\overrightarrow{v}_1(M,t)$***)***
***Ecrire, dans l'approximation acoustique, l'équation d'Euler sans oublier les forces de Laplace.***
***Comment se traduit l'incompressibilité ?***
***Que déduit-on de la loi d'Ohm pour un conducteur parfait et dans le cadre de l'approximation acoustique ?***
***Que deviennent les équations de Maxwell dans ce cadre ; on supposera que le milieu reste électriquement neutre et que l'on est dans le cadre des régimes quasi-stationnaires ?***

Rappelons que l'élément de courant s'écrit $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ pour un courant filiforme et $\overrightarrow{j}\,\mathrm{d}\Omega$ pour un courant en volume. La force de Laplace élémentaire s'écrit donc selon le cas $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{B}$ ou $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\,\mathrm{d}\Omega$ : on a donc pour un fluide conducteur une force volumique $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$ et l'équation d'Euler s'écrit alors, en négligeant l'effet de la pesanteur[2]

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v} \right) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

L'approximation acoustique consiste à négliger les termes d'ordre deux comme $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}_1$, d'où

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1 + \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{B_0} \qquad \text{(équation 1)}$$

---

[1] Les ions sont entraînés par le fluide à la vitesse $\overrightarrow{v_1}$, les électrons, plus mobiles ont une vitesse relative non négligeable notée $\overrightarrow{u}$ et ont donc une vitesse absolue $\overrightarrow{v}'_1 = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u}$. Il y a, par unité de volume, le même nombre $n$ d'électrons libres et d'ions positifs d'où $\overrightarrow{j_1} = n\,e\,(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v'_1}) = -n\,e\,\overrightarrow{u}$ donc sans rapport avec $\overrightarrow{v_1}$

[2] si l'on ne le fait pas le terme $\rho_0\,\overrightarrow{g}$ se simplifiera alors avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_0$ car $p_0$ n'est plus uniforme dans ce cas, cf. hydrostatique.

L'incompressibilité se traduit classiquement par

$$\operatorname{div} \overrightarrow{v_1} = 0 \qquad \text{(équation 2)}$$

Si l'on écrit la loi d'Ohm sous la forme $\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{j}}{\sigma}$, alors, lorsque la conductivité devient infinie, on a alors $\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ et à l'ordre un (approximation acoustique) :

$$\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{0} \qquad \text{(équation 3)}$$

Dans le cadre des approximations de l'énoncé, les équations de Maxwell deviennent

$$\operatorname{div} \overrightarrow{B_1} = 0 \qquad \text{(équation 4)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \overrightarrow{E_1} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} \qquad \text{(équation 5)}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E_1} = 0 \qquad \text{(équation 6)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \, \overrightarrow{j_1} \qquad \text{(équation 7)}$$

Notez que c'est la conductivité infinie qui rend l'hypothèse quasi-stationnaire[3] crédible.

***Question 3 :***
***En quoi le milieu est-il anisotrope ? Qu'en déduit-on pour la vitesse de propagation des ondes ?***

La présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ préexistant à l'onde donne une direction privilégiée à l'espace. La vitesse de propagation dépend donc *a priori* de l'angle que fait la direction de propagation avec ce champ.

***Question 4 :***
***On se place dans le cas simple où l'onde se propage dans la direction du champ $\overrightarrow{B_0}$, c'est-à-dire dans la direction de $Oz$. Montrez que l'onde est une onde transversale.***

Pour une onde en $\exp \jmath \, (\omega \, t - k \, z)$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ se traduit par une multiplication par $\jmath \, \omega$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ par $-\jmath \, k$ et donc l'opérateur $\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y} \overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z} \overrightarrow{e_z}$ par $-\jmath \, k \, \overrightarrow{e_z}$

L'équation 2, l'équation 4 et l'équation 6 deviennent[4]

$$-\jmath \, k \, \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$$

$$\overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{B_1} = 0$$

$$\overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{E_1} = 0$$

ce qui assure le caractère transversal de l'onde.

***Question 5 :***
***On se place dans le cas simple d'une onde polarisée rectilignement. Terminer en cherchant l'équation de dispersion. Quelle vitesse de phase trouve-t-on ? On remarquera que ce résultat n'a rien à voir ni avec la vitesse de la lumière, ni avec la vitesse du son.***

---

[3] par définition

$$\left\| \varepsilon_0 \, \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right\| \ll \|j\| = \sigma \|\overrightarrow{E}\|$$

validée ici par $\sigma = \infty$, l'adjonction du terme en $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ ne changeant pas fondamentalement les choses.

[4] Pour un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$, on a formellement $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$ et de même pour un champ scalaire $f$ on a $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \, f = \nabla f$

Posons

$$\overrightarrow{E_1} = E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x}$$

L'équation 5 devient

$$-\jmath\,k\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{E_1} = -\jmath\,\omega\,\overrightarrow{B_1}$$

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{k}{\omega}\,E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y}$$

L'équation 7 devient

$$-\jmath\,k\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{B_1} = \mu_0\,\overrightarrow{j_1}$$

$$\overrightarrow{j_1} = \frac{\jmath\,k^2}{\mu_0\,\omega}\,E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x}$$

Pour l'équation 3, puisque $\overrightarrow{v_1}$ est transversal, notons $\overrightarrow{v_1} = v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y}$ ; alors l'équation 3 devient

$$E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x} = -(v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y}) \wedge (B_0\overrightarrow{e_z}) = B_0\,v_x\,\overrightarrow{e_y} - B_0\,v_y\,\overrightarrow{e_x}$$

On égale les projections : $v_x$ est nul, on tire $v_y$ et l'on en déduit

$$\overrightarrow{v_1} = -\frac{1}{B_0}\,E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y}$$

Enfin l'équation 1 donne

$$\jmath\,\omega\,\rho_0\,\overrightarrow{v_1} = \jmath\,k\,p_1\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

$$-\frac{\jmath\,\omega\,\rho_0}{B_0}\,E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_y} = \jmath\,k\,p_1\,\overrightarrow{e_z} + \frac{\jmath\,k^2}{\mu_0\,\omega}\,E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)\,\overrightarrow{e_x} \wedge (B_0\overrightarrow{e_z})$$

La projection sur $\overrightarrow{e_z}$ nous apprend que $p_1$ est nul : une onde M.H.D. ne génère pas d'onde de pression. La projection sur $\overrightarrow{e_y}$ donne

$$-\frac{\jmath\,\omega\,\rho_0}{B_0}\,E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z) = -\frac{\jmath\,k^2\,B_0}{\mu_0\,\omega}\,E_m \exp \jmath\,(\omega\,t - k\,z)$$

soit après simplifications

$$\frac{\omega\,\rho_0}{B_0} = \frac{k^2\,B_0}{\mu_0\,\omega} \qquad \text{soit} \qquad k^2 = \frac{\mu_0\,\rho_0}{B_0^2}\,\omega^2$$

On en déduit une vitesse de phase

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\,\rho_0}}$$

***Question 6 :***

***Application numérique pour le mercure :*** $\rho_0 = 7{,}6\,10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$***. Calculer la vitesse de phase des ondes MHD avec*** $B_0 = 1$ ***T.***

Bien sûr $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ S.I. ; le calcul donne

$$V_\varphi = 10{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

On remarque que la vitesse de ce type d'onde est très faible par rapport à celle du son et *a fortiori* celle de la lumière.